一　长方体和正方体

一、长方体的认识

1.认识长方体的面、棱、顶点。

(1)从不同的角度观察同一个长方体。

把长方体放在桌面上,无论从哪个角度观察,最多只能同时观察到长方体的三个面。

(2)长方体的棱和顶点。

长方体两个面相交的线叫作长方体的棱,三条棱相交的点叫作长方体的顶点。

2.长方体的特征。

长方体是由6个长方形(也可能有2个相对的面是正方形)围成的立体图形,它有6个面、12条棱和8个顶点。在一个长方体中,相对的面完全相同,相对的棱长度相等。

3.长方体长、宽、高的含义。

长方体相交于同一顶点的三条棱的长度,分别叫作它的长、宽、高。

4.长方体的长、宽、高不是固定不变的,它与长方体的摆放方式有关。长方体相交于同一顶点的三条棱中,通常把水平方向的两条棱分别叫作它的长和宽,把竖直方向的一条棱叫作它的高。

二、正方体的认识

1.正方体也叫立方体。它是由6个完全相同的正方形围成的立体图形。它的6个面是完全相同的正方形,12条棱的长度都相等,有8个顶点。

2.正方体的长、宽、高相等,都叫正方体的棱长。

3.长方体和正方体的特征的异同。

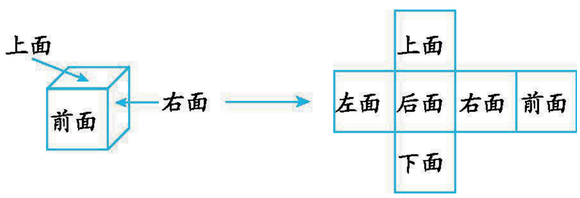
①相同点:都有6个面、12条棱、8个顶点,相对的面完全相同,相对的棱长度相等。

②不同点:长方体的6个面都是长方形(也可能有2个相对的面是正方形);一般情况下,棱有3组,每组4条棱长度相等。正方体的6个面是完全相同的正方形;每条棱的长度都相等。

三、正方体、长方体的展开图

1.把一个正方体沿一条棱剪开,如下图所示。

正方体的展开图是由6个完全相同的正方形组成的,可以通过观察、折叠找到3组相对的面。



2.沿长方体的棱把长方体剪开,展开图中有3组相对的面,相对的面完全相同,相对的面完全隔开。

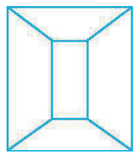
导学点睛

易错点:误认为一个长方体中最多有4条相等的棱。这是错误的,一定要注意长方体的6个面不一定都是长方形,也可能有2个相对的面是正方形。当长方体有2个相对的面是正方形时,就有8条棱长度相等。

直观图中的实线表示从某个角度能够看到的棱,虚线表示看不到的棱。

长方体12条棱的长度和叫作长方体的棱长总和。长方体的棱长总和=(长+宽+高)×4。

易错点:误认为有6个面、12条棱、8个顶点的立体图形不是长方体就是正方体。这是不正确的,一定要注意有6个面、12条棱、8个顶点并不代表它就是长方体或正方体,要看它是否具备长方体或正方体的所有特征,如下图,这个立体图形既不是长方体,也不是正方体。



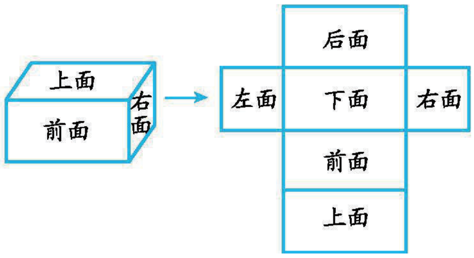
正方体的棱长总和:棱长×12。

正方体具有长方体的一切特征,正方体是特殊的长方体。

同一个立体图形,沿不同的棱剪开,得到的展开图不同。

技巧:

正方体有6个相同的面,可以



3.沿着正方体(或长方体)的棱将它剪开,可以把正方体(或长方体)展开成一个平面图形,这个平面图形就是正方体(或长方体)的展开图。在展开图中,正方体的 6 个面完全相同(长方体相对的面完全相同),相对的面完全隔开。

四、长方体和正方体表面积的意义及计算方法

1.表面积的意义:长方体(或正方体)6 个面的总面积,叫作它的表面积。

2.长方体和正方体表面积的计算方法。

(1)长方体的表面积=长×宽×2+长×高×2+宽×高×2=(长×宽+长×高+宽×高)×2。

如果用 S 表示长方体的表面积,用 a、b、h 分别表示长方体的长、宽、高,那么长方体表面积的计算公式是 $S=2ab+2ah+2bh$ 或 $S=(ab+ah+bh)\times2$。

(2)正方体的表面积=棱长×棱长×6。

如果用 S 表示正方体的表面积,用 a 表示棱长,那么正方体表面积的计算公式是 $S=6a^2$。

五、运用长方体和正方体表面积的计算方法解决实际问题

1.求长方体和正方体物体的表面积时,最关键的是要根据实际情况确定好求几个面的面积和。

2.在实际生活中,并不是所有长方体形状的物体都有 6 个面,如长方体的鱼缸只有 5 个面,通风管只有 4 个面。因此,在计算时要根据实际情况解题。

六、体积和容积的意义

1.物体所占空间的大小叫作物体的体积。

2.能盛装其他物体的都可以称为容器,不能盛装其他物体的都不是容器。

3.容器所能容纳物体的体积叫作容器的容积。

4.有容积的物体一定有体积,但有体积的物体不一定有容积。

七、体积单位

通过观察、折叠找到 3 组相对的面。

长方体有 3 组相对的面,可以通过看是否完全隔开,完全隔开的一组面就是相对的两个面。

当所求的长方体的表面积是 6 个面的面积时,先分别求出每组相对的面中一个面的面积,相加后再乘 2 较简便。

举例:大厅里有 8 根高为 5 米的方柱需要涂油漆,方柱的横截面是边长为 0.5 米的正方形,若 1 千克油漆可以涂 5 平方米,则涂这 8 根方柱需要多少千克油漆?

错解:(0.5×0.5×2+0.5×5×4)×8÷5×1=16.8(千克)

答:涂这 8 根方柱需要 16.8 千克油漆。

正解:0.5×5×4×8÷5×1=16(千克)

答:涂这 8 根方柱需要 16 千克油漆。

一个容器容积的大小与它所能盛装物体的多少有关。因为容器都有一定的厚度,所以一个容器的体积一般大于它的容积。

1.棱长是 1 厘米的正方体,体积是 1 立方厘米。

2.棱长是 1 分米的正方体,体积是 1 立方分米。

3.棱长是 1 米的正方体,体积是 1 立方米。

4.常用的体积单位有立方厘米、立方分米和立方米,用字母表示分别是 cm^3、dm^3 和 m^3。

八、容积单位

1.容积单位的使用方法。

计量容积,一般就用体积单位。计量液体的体积,如水、油等,通常用升或毫升作单位。升和毫升,用字母表示分别为 L 和 mL,其中 1 L=1000 mL。

2.容积单位的换算。

1 dm^3=1 L　1 cm^3=1 mL

高级单位向低级单位转换用乘法计算;低级单位向高级单位转换用除法计算。

3.“容积”与“体积”的区别。

(1)意义不同。

体积是指物体所占空间的大小,而容积是指容器所能容纳物体的体积。一个物体有体积,但它不一定有容积。

(2)测量方法不同。

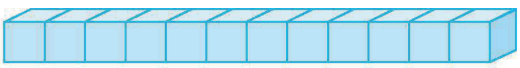
求物体的体积是从物体的外面测量它的长、宽、高进行计算,而求物体的容积则必须从里面来测量它的长、宽、高,然后计算。因此,对于同一个物体,一般来说,它的容积要比体积小。

(3)单位名称不完全相同。

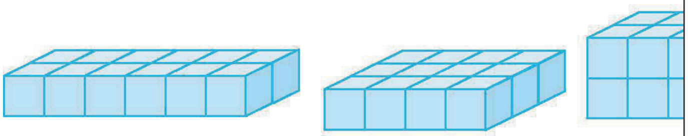
体积单位一般用立方米、立方分米、立方厘米。固体、气体的容积单位与体积单位相同,而液体的容积单位一般用升、毫升。

九、长方体体积公式的推导

1.以取 12 个 1 立方厘米的小正方体,摆出不同形状的长方体为例,如下图:



长方体①



长方体②　长方体③　长方体(

每个小正方体的体积是 1 立方厘米,每个长方体是由 12 个小正方体摆成的,所以每个长方体的体积都是 12 立方厘米。

并不是只有棱长是 1 cm、1 dm、1 m 的正方体的体积才是 1 cm^3、1 dm^3 和 1 m^3。

易错点:误认为容积就是体积,这是不对的,一定要注意“容积”与“体积”的不同。如一本书有体积,却没有容积。

较大容器盛装液体时用“升”作单位,较小容器盛装液体时用“毫升”作单位。

巧记:

体积单位常用到,相邻进率是1000。

高级单位化低级,要把此数乘1000。

低级单位化高级,除以 1000把数算。

转换过程要细心,掌握进率是关键。

明确摆成不同形状长方体的长、宽、高分别是多少。

1 立方厘米的小正方体的边长是 1 厘米。长方体的长、宽、高由几个小正方体摆成,它的长、宽、高就分别是几厘米,它的体积正好等于摆成长方体所需小正方体的个数。

2.填写表格。

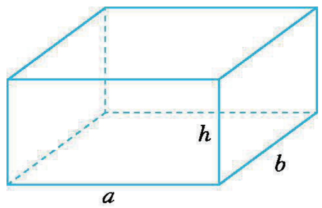
	长/cm	宽/cm	高/cm	小正方体的个数	体积/cm^3
长方体①	12	1	1	12	12
长方体②	6	2	1	12	12
长方体③	4	3	1	12	12
长方体④	3	2	2	12	12

3.(1)在摆成的长方体中,每排小正方体的个数相当于长方体的长;排数相当于长方体的宽;层数相当于长方体的高。

(2)长方体所含小正方体(体积单位)的个数正好等于长方体长、宽、高的乘积。

4.长方体体积公式的字母表达式。

如果用 V 表示长方体的体积,用 a、b、h 分别表示长方体的长、宽、高,那么长方体的体积公式可以写成 $V=abh$。



长方体的体积=长×宽×高,字母公式为 $V=abh$。

5.拓展提高。

当长方体的长、宽、高都扩大到原来的 n 倍时,它的体积就扩大到原来的 n^3($n×n×n=n^3$)倍;当长方体的长、宽、高都缩小到原来的$\frac{1}{n}$时,它的体积就缩小到原来的$\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\right)$。

十、正方体体积公式的推导

1.长方体的体积=长 × 宽 × 高

↓ ↓ ↓

正方体的体积=棱长×棱长×棱长

2.正方体体积的字母公式。

如果用 V 表示正方体的体积,用 a 表示正方体的棱长,那么正方体体积的字母公式可以写成 $V=a·a·a=a^3$。

3.拓展提高。

举例:如果一个长方体的长、宽、高都扩大到原来的 2 倍,那么它的体积就扩大到原来的 2^3 倍,即 8 倍;反之,如果一个长方体的长、宽、高都缩小到原来的$\frac{1}{2}$,那么它的体积就缩小到原来的$\frac{1}{2^3}$,即$\frac{1}{8}$。

$a·a·a$ 也可以写成“a^3”,即 $a·a·a=a^3$,读作“a 的立方”,表示 3 个 a 相乘。因此,正方体的体积公式一般写成 $V=a^3$。写 a^3 时,“3”要写在 a 的右上角,且要略小一些。

举例:如果一个正方体的棱长扩大到原来的 2 倍,那么它的体积就扩大到原来的 8 倍;反之,如果一个正方体的棱长缩小到原来的$\frac{1}{2}$,那么它的体积就缩小到原来的$\frac{1}{8}$。

在有些实际问题中,也可以用“横截面的面积×长”来计算体积。

当正方体的棱长扩大到原来的 n 倍时,它的体积就扩大到原来的 n^3 倍;当正方体的棱长缩小到原来的$\frac{1}{n}$时,它的体积就缩小到原来的$\frac{1}{n^3}$。

十一、运用体积公式解决实际问题

如果长方体和正方体体积公式中的已知条件都具备,那么可直接利用公式计算体积。

十二、长方体和正方体体积的通用公式

1.长方体和正方体底面积的意义。

长方体和正方体无论怎样放置,总有一个面与平面接触,通常把这个面叫作底面。长方体和正方体底面的面积,叫作它们的底面积。

2.长方体和正方体底面积的计算方法。

(1)长方体的底面积=长×宽。

(2)正方体的底面积=棱长×棱长。

3.长方体和正方体体积公式的推导。

$$\left.\begin{array}{l}\text{长方体的体积} = \underbrace{\text{长} \times \text{宽}}_{\text{底面积}} \times \underbrace{\text{高}}_{\text{高}} \\ \text{正方体的体积} = \underbrace{\text{棱长} \times \text{棱长}}_{\text{底面积}} \times \underbrace{\text{棱长}}_{\text{可看作高}}\end{array}\right\} \text{长方体(或正方体)的体积=底面积×高}$$

长方体(或正方体)的体积=底面积×高。如果用 V 表示体积,S 表示底面积,h 表示高,那么长方体(或正方体)的体积公式可以写成 $V=Sh$。

十三、容积的计算方法

1.长方体或正方体物体容积的计算方法与体积的计算方法相同,知道长、宽、高或棱长,即可根据体积公式求出物体的容积。

2.体积和容积的区别与联系。

(1)不同点。

①意义不同。

Ⅰ.物体所占空间的大小叫作物体的体积。

Ⅱ.容器所能容纳物体的体积叫作容器的容积。

②测量方法不同。

Ⅰ.求物体的体积是从物体的外部来测量长、宽、高或棱长。

运用通用公式进行计算时,一定要注意单位的统一。如一个长方体的底面积是 8 平方厘米,高是 3 分米,求体积。

错解:8×3=24(立方厘米)

正解:3 分米=30 厘米,8×30=240(立方厘米)

计算体积从外面测量长、宽、高;计算容积从里面测量长、宽、高。有的物体既有体积,也有容积,如箱子、油桶、瓶子等。有的物体有体积,却没有容积,如石头、木头这类实心的物体。既有体积又有容积的物体,它的体积一定大于它的容积。只有在容器厚度忽略不计的情况下,容积才可以看作与体积相等。

巧记:

容积、体积孪兄弟,只是度量不统一。

容积心中装物体,体积只想占空间。

容积尺寸从里测,体积尺寸从外量。

记住二者不同处,计算才能少失误。

Ⅱ.求物体的容积是从容器的内部来测量长、宽、高或棱长。 ③单位名称不完全相同。 Ⅰ.体积单位一般用立方米、立方分米、立方厘米。 Ⅱ.容积一般用体积单位,但在计量液体(如药水、汽油等)的体积时,常用升或毫升作单位。 (2)相同点。 计算公式相同。长方体(或正方体)的体积(或容积)=底面积×高。	

二　分数乘法 一、分数与整数相乘的意义和计算方法 1.整数乘法的意义。 求几个相同加数的和的简便运算。 2. (1)分数乘整数的意义与整数乘法的意义相同,都是求几个相同加数的和的简便运算。 (2)分数与整数相乘的计算方法:用分数的分子和整数相乘的积作分子,分母不变。能约分的要先约分,再计算。 二、求一个数的几分之几是多少 1.求一个数的几分之几是多少,用乘法计算。 2.求一个数的几倍与求一个数的几分之几实质上是相同的,它们都表示两个数的倍比关系。只是在用整数或小数表示这种倍比关系时,要说成一个数是另一个数的几倍,而在用分数表示时,要说成一个数是另一个数的几分之几。如一个数的 1.5 倍,也可以表示为一个数的$\frac{3}{2}$。因此,求一个数的几倍是多少与求一个数的几分之几是多少都可以用乘法计算。 三、分数乘分数的意义和计算方法 1.分数乘分数的意义就是求一个数的几分之几是多少。 2.分数和分数相乘,用分子相乘的积作分子,分母相	**导学点睛** 巧记: 分数乘整数,计算很简单; 分子乘整数,分母不用变; 计算想简便,约分要在先; 结果要想准,分数化最简。 在解决求一个数的几分之几是多少的实际问题时,关键是要弄清哪个量是单位“1”。 当相乘的两个分数的分子和分母能够约分时,可以先约分,再计算。 找准每步计算的单位“1”是解答连续求一个数的几分之几是多少的实际问题的关键。 易错点:比较积与第一个因数

乘的积作分母。能约分的要先约分,再计算。 3.整数可以看成分母是1的分数,所以分数与整数相乘,也可以看成是分数与分数相乘,即分数与分数相乘的计算方法适用于分数与整数相乘。 四、连续求一个数的几分之几是多少的解题方法及分数连乘的计算方法 1.连续求一个数的几分之几是多少的解题方法:先求出中间的间接量,再求出最后要求的量。 2.分数连乘的计算方法:分子和分子相乘的积作分子,分母和分母相乘的积作分母。能约分的要先约分,再计算。 五、积与因数的大小关系 积与因数的大小关系: $a\times b=c$(a 不为 0),当 $b>1$ 时,$c>a$;当 $b<1$ 时,$c<a$;当 $b=1$ 时,$c=a$。 六、倒数的意义 1.意义。 乘积是 1 的两个数互为倒数。 2.理解“互为倒数”。 “互为倒数”是对两个数来说的,它们是相互依存的,不能单独说某个数是倒数。 七、求倒数的方法 1.观察互为倒数的两个数的分子、分母的特点,发现互为倒数的两个数,它们分子、分母的位置是互换的。 2.求一个数的倒数的方法。 (1)求真分数、假分数的倒数,可以直接调换这个分数的分子、分母的位置。 $\frac{3}{7}\xrightarrow{\text{分子、分母调换位置}}\frac{7}{3}$ $\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{分子、分母调换位置}}\frac{2}{3}$ (2)求一个整数(0 除外)的倒数,先把整数看作分母是 1 的假分数,再调换这个分数分子、分母的位置。 (3)求小数的倒数,先把小数化成最简分数,再调换分子、分母的位置,也可以根据倒数的意义来找。 例如:$0.8\xrightarrow{\text{化成分数}}\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{分子、分母调换位置}}\frac{5}{4}$,所以 0.8 的倒数是$\frac{5}{4}$,或 $0.8\times1.25=1$,所以 0.8 的倒数是 1.25。 (4)求带分数的倒数,先把带分数化成假分数,再调换	的大小只考虑按第二个因数的大小进行判断,这是不对的,一定要注意前提条件是“第一个因数”不能为0。 单独一个数不能称为倒数。因为互为倒数的两个数是相互依存的。 注意:互为倒数的两个数不能用等号连接,即把一个数和它的倒数不能表示成相等关系。例如:求$\frac{3}{7}$的倒数。可写成$\frac{3}{7}\rightarrow\frac{7}{3}$或$\frac{3}{7}$的倒数是$\frac{7}{3}$,而不能写成$\frac{3}{7}=\frac{7}{3}$。 巧记: 学习倒数需牢记, 相互关系不可弃。 两数相乘积为“1”, 子母颠倒即完毕。

分子、分母的位置。

例如:$5\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{化成分数}}\frac{16}{3}\xrightarrow{\text{分子、分母调换位置}}\frac{3}{16}$,所以$5\frac{1}{3}$的倒数是$\frac{3}{16}$。

3.特殊数的倒数。

(1)1 的倒数是 1。

因为 1×1=1,所以 1 的倒数是 1。

(2)0 没有倒数。

因为 0 与任何数相乘都得 0,没有一个数与 0 相乘的积是 1,所以 0 没有倒数。

三 分数除法

一、分数除以整数和一个数除以分数的计算方法

1.分数除以整数的计算方法。

(1)整数除法的意义:已知两个因数的积和其中一个因数,求另一个因数的运算。

(2)分数除法的意义与整数除法的意义相同,都是已知两个因数的积和其中一个因数,求另一个因数的运算。

(3)分数除以整数(0 除外),等于分数乘这个整数的倒数。

2.整数除以分数的计算方法。

整数除以分数,等于整数乘这个分数的倒数。

3.分数除以分数的计算方法。

分数除以分数,可以用被除数乘除数的倒数来计算。

4.推导分数除法的计算方法。

(1)利用商不变的规律进行推导。

被除数和除数同时乘除数的倒数,让除数变为 1。

(2)利用等式的基本性质进行推导。

5.分数除法的计算方法。

甲数除以乙数(0 除外),等于甲数乘乙数的倒数。

6.商与被除数的大小关系。

一个数(0 除外)除以 $\begin{cases}\text{小于 1 的数}\rightarrow\text{商大于被除数}\\ 1\rightarrow\text{商等于被除数}\\ \text{大于 1 的数}\rightarrow\text{商小于被除数}\end{cases}$

二、“已知一个数的几分之几是多少,求这个数”的解题方法

1.已知一个数的几分之几是多少,求这个数,是把这个数看作单位“1”,单位“1”的量是未知的,可以设单位“1”

导学点睛

把除法转化为乘法,是由一种形式变换成另一种形式,而其本身的大小不变。

易错点:在进行计算时,把除号变为乘号后忘记变为除数的倒数。如$\frac{4}{5}\div\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$,应为$\frac{4}{5}\div\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{2}=2$。

举例:$\frac{7}{9}\div\frac{14}{15}=\left(\frac{7}{9}\times\frac{15}{14}\right)\div\left(\frac{14}{15}\times\frac{15}{14}\right)=\frac{5}{6}\div1=\frac{5}{6}$

被除数(0 除外)与商的大小关系取决于除数与 1 的大小关系。

技巧:

(1)找出单位“1”的量。

(2)看谁和单位“1”的量相比,找出比较量和比较量对应的几分之几。

注意:有时一道题中的单位“1”不止一个,有两个或多个。一个数量在某一个条件中是单位“1”,在另一个条件中有可能就不是单位“1”,

的量为 x,根据乘法的意义列方程解答。

2.可以用算术法解答“已知一个数的几分之几是多少,求这个数”的应用题。算术解法和方程解法都要根据数量之间的相等关系来列式。

3.比较分数乘法应用题与分数除法应用题的异同:

应用题类型	结构特征			计算方法
	单位“1”	比较量	比较量对应的几分之几	
求一个数的几分之几是多少	已知	未知	已知	乘法:单位“1”的量×几分之几=比较量
求一个数是另一个数的几分之几	已知	已知	未知	除法:比较量÷单位“1”的量=几分之几
已知一个数的几分之几是多少,求这个数	未知	已知	已知	除法:比较量÷几分之几=单位“1”的量 方程:单位“1”的量×几分之几=比较量

三、分数连除和乘除混合运算

1.乘除混合运算的计算方法。

计算分数乘除混合运算时,先把其中的除法转化为乘法,再按照分数连乘的方法进行计算。

2.连除运算的计算方法。

计算分数连除时,先把其中的除法转化为乘法,再按照分数连乘的方法进行计算。

四、比的意义

1.比的意义及各部分名称。

(1)比的意义:两个数相除又叫作两个数的比。

(2)比的读、写方法。

“比”可以用比号“:”来代替,也可以写成分数的形式,两种形式的比都读“几比几”。如 3 比 2,写作 3:2 或$\frac{3}{2}$,读作 3 比 2。

(3)比的各部分名称。

$$a \quad : \quad b=\frac{a}{b}(\text{其中 } b\neq 0)$$

a	:	b	$\frac{a}{b}$
↓	↓	↓	↓
比的前	比号	比的后	比值

解题时要认真比较,找准几分之几对应的单位“1”,才能正确解答。

巧记:

解决问题并不难,读懂题意最关键。

重点找准单位“1”,画出线段破难关。

根据等量列方程,解答完毕要检验。

注意:计算分数连除时,一定要连续地乘除数的倒数,不要只把第一个除数变成它的倒数,其他除数只变符号不变数。

(1)两个数的比可以表示两个数之间的倍数关系。如果汁有 2 杯,牛奶有 3 杯,果汁与牛奶杯数的比是 2 比 3,可以理解为果汁有 2 份,牛奶有 3 份;也可以理解为果汁的杯数相当于牛奶的$\frac{2}{3}$,牛奶的杯数相当于果汁的$\frac{3}{2}$。

(2)两个数的比可以表示两个数相除。

举例:鱼缸里有 3 条红金鱼,5 条黑金鱼,黑金鱼和红金鱼的数量比是(　　)。

错解:3:5

正解:5:3

(4)比是有序的。 求一个量和另一个量的比,则前一个量是比的前项,后一个量是比的后项。 2.比值的意义和求法。 (1)比值的意义:比的前项除以后项所得的商。 (2)求比值的方法:用比的前项除以后项。 3.比和比值的联系与区别。 (1)比和比值的联系:都可以用分数形式表示。 (2)比和比值的区别:①比表示两个数的倍比关系,比值是一个数值;②比只能写成 $a:b$ 或$\frac{a}{b}$的形式,而比值可以是分数、小数或整数。 4.比与分数、除法的关系。 联系:比的前项相当于分子、被除数;比号相当于分数线、除号;比的后项相当于分母、除数;比值相当于分数值、商。 区别:比是一种关系;分数是一类数;除法是一种运算。 5.比与除法、分数之间的区别。 (1)意义不同:比是表示两个量(或数)的一种关系;除法是一种运算;分数则是一类数。 (2)表示方法不同:作为一种运算,除法算式不能用分数表示;比可以用分数表示;分数不一定表示两个量的比。 (3)结果表达不同:除法一般要求出商;比只有要求计算时才求出比值;分数本身就是一个数值,无需计算。 6.反比:把一个比的前项作为后项,后项作为前项,所得的比和原来的比互成反比。如 3:5 是 5:3 的反比,5:3 也是 3:5 的反比。互成反比的两个比的比值互为倒数。 7.复比:把两个(或两个以上)比的前项相乘的积作为前项,后项相乘的积作为后项,所成的比叫作这些比的复比。如甲、乙两人的速度比是 3:4,时间比是 5:6,那么他们所行的路程比就是(3×5):(4×6)=5:8,路程比就是速度比和时间比的复比。复比的比值等于组成它的各个单比比值的乘积。 8.连比:三个(或三个以上)量组成的比叫作连比。如果甲与乙的比是 $a:b$,乙与丙的比是 $b:c$,那么甲、乙、丙三个量的比可以写作 $a:b:c$,$a:b:c$ 就叫作甲、乙、丙三	比值是一个数,它可以是分数、小数或整数。 注意:求两个不同单位的同类量的比,要先把单位统一。如小明看一本漫画书用了 1 小时,小东看同一本漫画书用了 43 分钟,小明和小东所用的时间比是(　　)。 错解:1:43 正解:60:43 因为除数和分母都不能为 0,所以比的后项也不能为 0。 知识巧记: 比的意义很重要,记忆方法有诀窍。 两数相除即为比,除号变点挺奇妙。 前项后项和比值,位置顺序不能调。 分数除法比相联,相互关系要记牢。

个量的连比。可以把几个比组成连比,也可以把连比分成几个比。比可以看作比的前项除以后项,但是连比不能看作组成连比的几个数连除。连比与连除的含义是不同的。

五、比的基本性质

1.比的基本性质。

比的前项和后项同时乘或除以相同的数(0 除外),比值不变。这是比的基本性质。

2.化简比。

分数比:比的前项和后项同时乘两分数分母的最小公倍数 → 整数比

小数比:比的前项和后项的小数点向右移动相同的位数 → 整数比

整数比:比的前项和后项同时除以它们的最大公因数 → 最简单的整数比

化简比的结果是一个比,不是一个数。

3.化简比与求比值的区别:

	计算(化简)依据	方法	结果
化简比	比的基本性质	把比的前项和后项同时乘或除以相同的数(0除外)	是一个最简单的整数比
求比值	比的意义	用比的前项除以比的后项	是一个数,可以是分数、小数或整数

六、按比分配问题的意义及解题方法

1.在工农业生产和日常生活中,常常需要把一个数量按照一定的比来进行分配,这种分配方法通常叫作按比分配。

2.按比分配问题的解题方法。

(1)用整数乘、除法解决问题:①求出总份数;②求出每份是多少;③求出各部分的数量。

化简比的方法:可以用求比值的方法化简比。

判断一个比是不是最简单的整数比的方法:看这个比的前项和后项是不是只有公因数 1。

举例:化简比$\frac{1}{2}:\frac{1}{6}$。

错解:$\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{2}\times 6\right):\left(\frac{1}{6}\times 6\right)=3$

正解:$\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{2}\times 6\right):\left(\frac{1}{6}\times 6\right)=3:1$

易错点:误认为化简同类量的比时只要化为最简整数比就是正确的。一定要注意先统一单位,再化简,但化简后的比不能有单位。如化简 0.8 L:1.4 mL。

错解:4 L:7 mL

正解:4000:7

解答按比分配的问题时,一定要找准分配的总量和分配的份数。如一个长方形的周长是 84 厘米,长与宽的比是 4:3,这个长方形的长和宽各是多少厘米?

因为周长是两个长与两个宽的和,所以应该先用周长 84 除以 2 后,再按比分配。

(2)用分数乘法解决问题:①先根据比求出总份数;②再求出各部分量占总量的几分之几;③最后求出各部分的数量。 3.解决按比分配问题时,无论总数分成几部分,解题方法都是相同的。	

四　解决问题的策略 用假设的策略解决实际问题 在解决两个或两个以上的未知数量的问题时,按照一般的解题思路不易找到正确的解答方法,此时可以采用“假设”的策略来解决问题。先假设全部为一种量,并从假设后数量关系的变化情况出发,结合示意图先推算出其中一种量,再求另一种量。	**导学点睛** 在保证满足总量的前提下,也可以假设两种量分别是多少进行推理。

五　分数四则混合运算 一、分数四则混合运算 1.分数四则混合运算的运算顺序。 (1)分数四则混合运算的运算顺序与整数四则混合运算的运算顺序相同。 (2)在一个算式里,如果只含有同级运算,要按照从左往右的顺序进行计算。 (3)在一个算式里,如果含有两级运算,要先算二级运算(乘法或除法),后算一级运算(加法或减法)。 (4)在一个算式里,如果有括号,要先算小括号里面的,再算中括号里面的,最后算中括号外面的。 2.分数四则混合运算的简便运算。 (1)整数的运算律或运算性质对于分数同样适用。 ①加法交换律:$a+b=b+a$ ②加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$ ③乘法交换律:$a\times b=b\times a$ ④乘法结合律:$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ⑤乘法分配律:$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ (2)恰当地运用运算律或运算性质可以使计算简便。 在加减混合运算中,加括号或去括号时要注意括号前面的符号,如果是加号,括号里面不变号;如果是减号,括号里面加变减、减变加。 二、用乘法和加、减法解决稍复杂的实际问题	**导学点睛** 当算式中含有多个二级运算时,二级运算可以同时运算。如 $\frac{7}{8}\times4+\frac{4}{11}\times\frac{11}{16}$ $=\frac{7}{2}+\frac{1}{4}$ $=\frac{15}{4}$ 举例:计算$\frac{5}{6}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$。 错解: $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ $=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)$ $=\frac{1}{30}$ 正解: $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ $=\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\right)$

1.已知总量及一个部分量占总量的几分之几,求另一个部分量时,可以列形如 $a-a\times\frac{c}{b}$或 $a\times\left(1-\frac{c}{b}\right)$的算式解题($b\neq0$)。 2.已知一个量及另一个量比它多(或少)几分之几,求另一个量时,可以列形如 $a\pm a\times\frac{c}{b}$或 $a\times\left(1\pm\frac{c}{b}\right)$的算式解题($b\neq0$)。	$=\frac{13}{30}$ 找准单位“1”是关键。 分析问题时,先抓住关键词语,如是、比、多、少、增加、减少、提高、降低、扩大、缩小等,再根据题意进行正确解答。

六　百　分　数

一、百分数的意义和读写方法

1.意义:一个数是另一个数的百分之几的数,叫作百分数。百分数又叫作百分比或百分率。

2.百分数通常不写成分数形式,而是在原来的分子后面加上“%”来表示。

3.百分数的读法:先读百分号(分母),读成“百分之”;再读百分号前面的数(分子),是几就读几。

4.分数与百分数的区别:

	分数	百分数
意义	分数是把单位“1”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数,它既可以表示两个数量间的倍比关系,又可以表示具体数值	表示一个数是另一个数的百分之几的数,叫作百分数。百分数又叫作百分比或百分率。它只表示两个数量间的倍比关系
表现形式	分数的表现形式有真分数、假分数和带分数,计算结果一般要化成最简分数	百分数的分母固定是100,并且用百分号表示;分子可以是整数或小数;分子可以大于分母,也可以小于或等于分母;百分数不能约分,也不能写成带分数的形式

导学点睛

写“%”时,两个圈要写得小些,以免与数字“0”混淆。

百分数读作“百分之几”,不读作“一百分之几”。

注意:百分数只表示两个数量间的倍比关系,不能用来表示具体的数量,后面不带单位名称。如把$\frac{20}{100}$千克写成20%千克是错误的,因为具体的数量不能用百分数表示。

单位名称	如果表示具体的数量,就要带单位名称;如果表示两个数量间的倍比关系,就不带单位名称	百分数只表示两个数量间的倍比关系,后面不带单位名称
应用范围	分数主要是在测量和计算得不到整数结果时使用	百分数主要用于日常生活中特定的百分率及调查、统计、分析和比较

二、百分数和小数的互化

1.小数改写成百分数,把小数点向右移动两位,如果位数不够,用“0”补位,同时在后面添上百分号。

2.百分数改写成小数,把百分号去掉,同时把小数点向左移动两位,如果位数不够,用“0”补位。

3.百分数和小数可以互化,这只是从数值上看,在具体运用时,这两者的意义不完全一样,不能互相代替。如一个数的 75%是 75 不能写成一个数的 0.75 是 75。又如“求比 68 多 25%的数”和“求比 68 多 0.25 的数”的意义完全不同。这是因为百分数是表示两个数的倍比关系,而小数表示的是数值。如比 68 多 25%的数表示为 68×(1+25%),而比 68 多 0.25 的数表示为 68+0.25。

三、百分数和分数的互化

1.分数改写成百分数,一般先把分数改写成小数(除不尽时,一般保留三位小数),再把小数改写成百分数。

2.把百分数改写成分数时,可以先把百分数改写成分母是 100 的分数,再进行化简;分子是小数时,先利用分数的基本性质把分子、分母同时扩大到原来的若干倍,把分子化成整数,再进行约分。

3.能化成有限小数的分数,分母中只含有质因数 2 和 5,否则就不能化成有限小数。判断一个分数能不能改写成有限小数,先要看这个分数是不是最简分数,不是最简分数的,要把它化成最简分数后再运用这一规律来判断。

四、求一个数是另一个数的百分之几的实际问题

1.求一个数是另一个数的百分之几的解题方法。

(1)百分数表示一个数是另一个数的百分之几,也就是“一个数是另一个数的几分之几”的特殊的表示方法,因此,求一个数是另一个数的百分之几的解题方法与求一个数是另一个数的几分之几的解题方法相同,都用除法计算。

当小数点向右移动两位时,得到的数就扩大到原来的 100 倍,再添上百分号,又缩小到得到的数的 $\frac{1}{100}$,所以当添上百分号时,百分号前的数要扩大到原来的 100 倍。

不是所有的分数都能改写成分母是 100 的分数,只有能改写成有限小数的分数,才可以改写成分母是 100 的分数。

一个百分数去掉百分号后,所得到的数就扩大到原来的 100 倍。百分数化成分数要约分成最简分数。百分数、小数、分数之间相互转化,只是数的表示方式发生变化,数的大小不变。

举例:

判断:10 克糖溶解在 100 克水中,糖占糖水的 10%。(　　)

错解:√

此题错在单位“1”(标准量)找错了。此题中的单位“1”应该是糖水的总质量,而不是水的质量。

正解:×

出勤率是百分率的一种,公式本身应该用百分数的形式表示。如果不乘 100%,公式只是分数形式,乘 100%既保持数值不变,又是百分数的形式。计算时,“100”参与计

(2)解“求一个数是另一个数的百分之几”的实际问题,用除法计算,用一个数÷另一个数。

(3)求一个数是另一个数的百分之几,必须找准单位“1”。

2.求简单的百分率。

(1)求出勤率等百分率的问题,实际上就是求一个数是另一个数的百分之几。

(2)常见的百分率。

$$出勤率=\frac{实际出勤人数}{应出勤人数}\times100\%$$

$$成活率=\frac{成活棵数}{种植总棵数}\times100\%$$

$$发芽率=\frac{发芽种子数}{试验种子总数}\times100\%$$

$$合格率=\frac{合格产品数}{产品总数}\times100\%$$

五、求一个数比另一个数多(或少)百分之几的实际问题

1.求甲数比乙数多百分之几的实际问题的解题方法:(甲数-乙数)÷乙数或甲数÷乙数-1。

2.求甲数比乙数少百分之几的实际问题的解题方法:(乙数-甲数)÷乙数或 1-甲数÷乙数。

3.解题关键:确定单位“1”。

六、纳税和利息问题

1.应纳税额的计算方法。

(1)求应纳税额实际上就是求一个数的百分之几是多少,用乘法计算,即应纳税额=收入额×税率。

(2)当纳税的方法不同且税率也不同时,要先判断应纳税额是按哪个税率缴纳的税款。如果收入中有不纳税的部分,那么应纳税额÷税率=应纳税所得额,收入额=应纳税所得额+不纳税金额。

2.“本金”“利息”及“利率”的含义。

(1)本金:存入银行的钱叫作本金。

算,“%”保留。

出勤率、成活率、发芽率等生活中特定的百分率不能超过100%。

巧记:

各种率,挺简单,计算形式记心间。

除法结果是小数,最后化成百分数。

百分数实际问题的解题思路与分数实际问题的解题思路相同。求一个数比另一个数多(或少)百分之几,就是求两个数的差量占另一个数(单位“1”)的百分之几。

应缴纳营业税税额=营业额×营业税税率

注意:任何一种存款,在计算利息时,都要乘存入时间。如王叔叔把 2000 元存入银行,存期三年,年利率为 3.75%。到期后可得利息多少元?应是2000×3.75%×3=225(元),而不是2000×3.75%=75(元)。

易错点:误认为打几折就是减少(降低)百分之几。如一件上衣原价 180 元,现在打七折出售,比原价降低了多少元?列式为180×70%=126(元),这样是不对

(2)利息:取款时银行除还给本金外,另外付的钱叫作利息,也叫应得利息。 (3)利率:利息占本金的百分率叫作利率,按年计算的叫作年利率,按月计算的叫作月利率。 3.利息的计算方法。 利息=本金×利率×时间 4.本息的计算方法。 本息=本金+利息 七、折扣问题 1.折扣问题的解题方法。 商店有时要把商品按原价的百分之几出售,通常称为打折出售。几折就是原价的百分之几十,几几折就是原价的百分之几十几。 2. “已知一个数的百分之几是多少,求这个数”的实际问题的解题方法:可以列方程解答,先找出单位“1”的量,并设为 x,再根据等量关系列方程。 3.表示一个数是另一个数十分之几的数,叫作成数。通常用在工农业生产中表示生产的增长状况。“一成”就是十分之一,改写成百分数就是 10%;“二成五”就是十分之二点五,改写成百分数就是 25%。 八、列方程解决稍复杂的百分数实际问题 1.稍复杂的百分数实际问题的解题方法。 在实际问题中,单位“1”未知时,通常设单位“1”为 x,先找出题中的等量关系,再列方程解决问题。 2.解决有关百分数的实际问题,在找准单位“1”的同时,还要看清所要求的问题与单位“1”的关系。	的,只求出了现价,没有求出现价比原价降低了多少元,应为 180-180×70%=54(元)。 商品打折后,比原价降低的金额=原价-现价。 找准等量关系是列方程解决实际问题的关键。