2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）试题卷

初中一年级组

考试时间：10:00-11:40　　满分：150 分

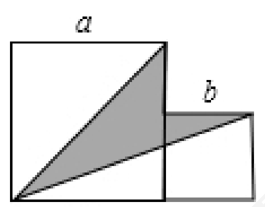
考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

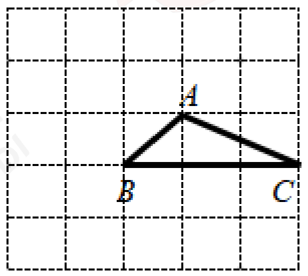
一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 已知$2x+5y-3=0$，则$4^{x}\cdot 32^{y}=$__________.

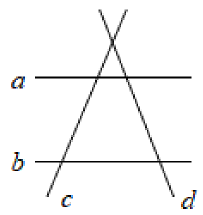
2. 如图，两个正方形边长分别为a、b，且满足$a+b=10$，$ab=12$，图中阴影部分的面积为__________.



第 2 题图



第 3 题图



第 6 题图

3. 如图是5×5的正方形网格，$\triangle ABC$的顶点都在小正方形的顶点上，像$\triangle ABC$这样的三角形叫格点三角形．画与$\triangle ABC$有一条公共边且全等的格点三角形，这样的格点三角形最多可以画__________个.

4. 设$M=2^{n}+2^{8}+1$（n为整数），若M为某个有理数的平方，则n的取值为__________.

5. 若$(x+1)(x^{2}-5ax+a)$的积中不含x^{2}项，则$(-5a)^{3}\div(-a^{2})=$ __________.

6. 上图中有__________对同位角。（其中$a//b$）

7. 已知$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，AD是$\triangle ABC$的中线，设AD长为m，则m的取值范围是__________.

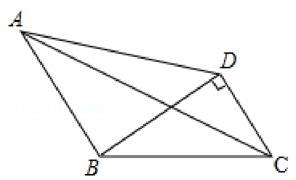
8. 三边长均为整数的三角形周长为 50，其最长边是最短边的 2 倍长，则最短边长是__________.

9. 已知一直角三角形有一条直角边为 12，另外两边长均为整数，则这样的三角形有__________个.

10. 已知有理数a、b、c满足$a+b=6$，$ab-c^{2}=9$，则$(a-b-2)^{3a+b+c-1}+8b+3=$__________.

11. 已知关于x的方程$|x-1|+|x-3|=a$有且只有两个解，则a的取值范围是__________.

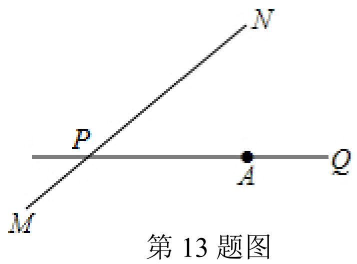
12. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BD$，$\angle BDA=45^{\circ}$，$BC=2$，若$BD\perp CD$于点D，则对角线AC的最大值为__________.



第 12 题图

二、解答题：（第 13 至 16 题，每小题 12 分，第 17 题 18 分，共 66 分）

13. 如图，公路MN和公路PQ在P点处交汇，点A处有一所中学，$AP=160$米，$\angle NPQ=30^{\circ}$，假使拖拉机行驶时周围 100 米以内会受到噪音影响，那么拖拉机在公路MN上沿PN方向行驶时学校是否会受到影响，请说明理由；如果受到影响，已知拖拉机的速度是 5 米/秒，那么学校受到的影响的时间为多少秒？

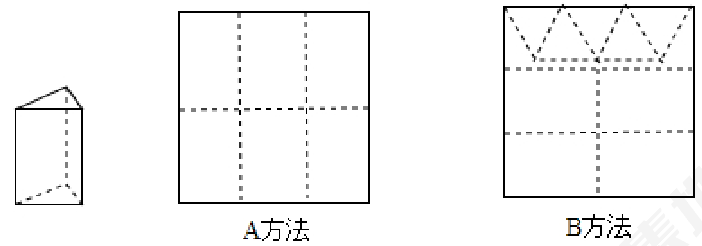


第 13 题图

14. 用正方形硬纸板做三棱柱盒子，每个盒子由 3 个长方形侧面和 2 个正三角形底面组成．硬纸板以如图两种方法裁剪（裁剪后边角料不再利用）.

A 方法：剪 6 个侧面；

B 方法：剪 4 个侧面和 5 个底面.



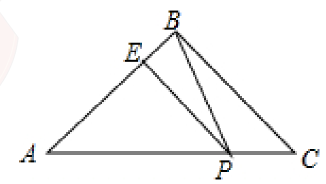
第 14 题图

现有 19 张硬纸板，裁剪时x张用A方法，其余用B方法.

（1）分别求裁剪出的侧面和底面的个数（用x的代数式表示）；

（2）若裁剪出的侧面和底面恰好全部用完，问能做多少个盒子？

15. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=90^{\circ}$，E是边AB上一点，$BE=2$，$AE=3BE$，P是AC上一动点，求$PB+PE$的最小值.



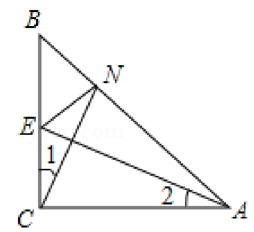
第 15 题图

16. 已知关于x的多项式$f(x)$除以$x-2$，余数为 7；$f(x)$除以$x-3$，余数为 9，求多项式$f(x)$除以$(x-2)(x-3)$的余式。

17. 如图$\triangle ABC$中，$\angle CAB=\angle CBA=45^{\circ}$，点$E$为$BC$的中点，$CN\perp AE$交$AB$于$N$.

（1）求证：$\angle1=\angle2$；

（2）求证：$AE=CN+EN$.



第 17 题图

2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）答案

初中一年级组

考试时间：10:00-11:40　　满分：150 分

考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。

（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。

（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 已知$2x+5y-3=0$，则$4^x\cdot 32^y=$__________.

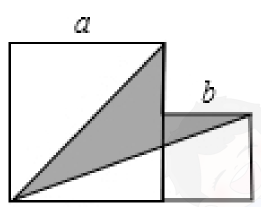
【答案】：8

【解析】:因为$2x+5y-3=0$, 得 $2x+5y=3$

$$4^x\cdot 32^y=2^{2x}\cdot 2^{5y}=2^{2x+5y}=2^3=8$$

2. 如图，两个正方形边长分别为a、b，且满足$a+b=10$，$ab=12$，图中阴影部分的面积为__________.

【答案】：32



第 2 题图

【解析】：因为 a+b=10，ab=12.

两个正方形面积之和为

$S_{总}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=10^2-2\times 12$

$=76$

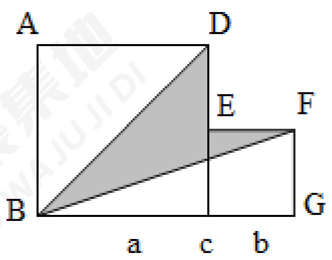
$S_{阴影}=S_{总}-S_{\Delta BFG}-S_{\Delta ABD}$

$=76-\frac{1}{2}\times(a+b)\times b-\frac{1}{2}a^2$

$=76-\frac{1}{2}(ab+a^2+b^2)$

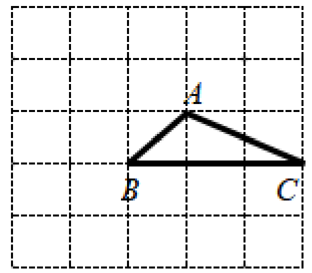
$=76-\frac{1}{2}\times(12+76)$

$=32$

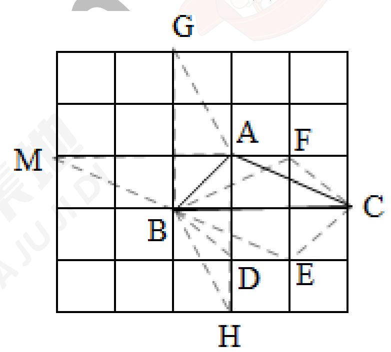


3. 如图是5×5的正方形网格，$\triangle ABC$的顶点都在小正方形的顶点上，像$\triangle ABC$这样的三角形叫格点三角形．画与$\triangle ABC$有一条公共边且全等的格点三角形，这样的格点三角形最多可以画__________个．

【答案】：6



第 3 题图



【解析】：如图. 以BC为公共边可画出$\Delta BDC, \Delta BEC, \Delta BFC$三个三角形和原三角形全等。以$AB$为公共边可画出三个三角形$\Delta ABG, \Delta ABM, \Delta ABH$和原三角形全等。所以最多可画 6 个

4. 设$M=2^n+2^8+1$（n为整数），若M为某个有理数的平方，则n的取值为__________.

【答案】：14 或 5 或-10

【解析】：分类讨论① $2^n+2^8+1=2^8+2\bullet 2^4\times 1+1^2=(2^4+1)^2$，$n=4+1=5$

② $2^n+2^8+1=2^n+2\bullet 2^7+1^2=(2^7+1)^2$，$n=2\times 7=14$

③ $2^n+2^8+1=(2^4)^2+2\times 2^4\times 2^{-5}+(2^{-5})^2=(2^4+2^{-5})^2$，$n=-10$

故$n=5$或 14 或-10

5. 若$(x+1)(x^2-5ax+a)$的积中不含x^2项，则$(-5a)^3\div(-a^2)=$ __________.

【答案】：25

【解析】：$(x+1)(x^2-5ax+a)$的积中不含x^2项，可知$-5a+1=0$，$a=\frac{1}{5}$

$$(-5a)^3\div(-a^2)=(-125a^3)\div(-a^2)=125a=125\times\frac{1}{5}=25$$

6. 图中有__________对同位角。（其中$a//b$）

【答案】：32

【解析】：分类讨论

要得到同位角，必是两条直线被第三条所截得到，

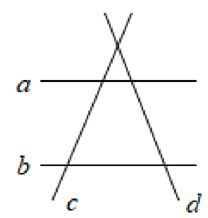
图中只有 8 种情形得到

①直线a、b被 c 所截　②直线 a、b 被 d 所截

③直线a、c被 d 所截　④直线 a、d 被 c 所截

⑤直线b、c被 d 所截　⑥直线 b、d 被 c 所截

⑦直线c、d被 a 所截　⑧直线 c、d 被 b 所截



第 6 题图

每种情形都得到4对同位角，共$4\times 8=32$（对）

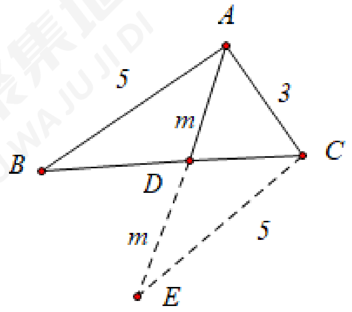
7. 已知$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，AD是$\triangle ABC$的中线，设AD长为m，则m的取值范围是__________.

【答案】：$1<m<4$

【解析】：延长AD至E，使$AD=DE$. 连接CE. $AE=2m$.

易证 $\Delta ABD\cong\Delta ECD(SAS)$. 故$AB=CE=5$

在ΔACE中. $5-3<2m<5+3$ 故 $1<m<4$



8. 三边长均为整数的三角形周长为 50，其最长边是最短边的 2 倍长，则最短边长是__________.

【答案】：10 或 11 或 12

【解析】：设最短为x,最长边为$2x$, $2x-x<$第三边$<2x+x$. 且第三边$\le 2x$.

$x<$第三边$\le 2x$. $50\div(1+1+2)=12.5$ $50\div(1+2+2)=10$

经验证$x=10$ 或 11 或 12

9. 已知一直角三角形有一条直角边为 12，另外两边长均为整数，则这样的三角形有__________个.

【答案】：4

【解析】：设另两条边长分别为a、b. a、b为正整数

由勾股定理得 $b^2-a^2=12^2=144$

$(b+a)(b-a)=144=1\times 144=2\times 72=3\times 48=4\times 36=6\times 24$

$=8\times 18=9\times 16=12\times 12$

由题意 a、b为正整数，$a+b>b-a$，知只能以下情形成立

$\begin{cases}b+a=72\\ b-a=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=36\\ b-a=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=24\\ b-a=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=18\\ b-a=8\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=37\\ a=35\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=20\\ a=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=15\\ a=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=13\\ a=5\end{cases}$

这样的三角形有4个

10. 已知有理数a、b、c满足$a+b=6$，$ab-c^2=9$，则$(a-b-2)^{3a+b+c-1}+8b+3=$__________.

【答案】：-2021

【解析】：由$a+b=6$，$ab-c^2=9$ 知 $b=6-a$

$a(6-a)-c^2=9$

$6a-a^2-c^2=9$

$a^2-6a+9+c^2=0$

$(a-3)^2+c^2=0$ 得 $a=3$. $c=0$. $b=6-3=3$

$(a-b-2)^{3a+b+c-1}+8b+3=(3-3-2)^{3\times 3+3+0-1}+8\times 3+3$

$=(-2)^{11}+27$

$=-2021$

11. 已知关于x的方程$|x-1|+|x-3|=a$有且只有两个解，则a的取值范围是__________.

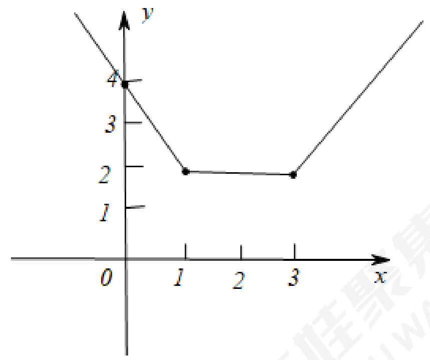
【答案】：$a>2$

【解析】：设 $y=|x-1|+|x-3|$,

①当$x\le 1$ 时，$y=1-x+3-x=-2x+4$,

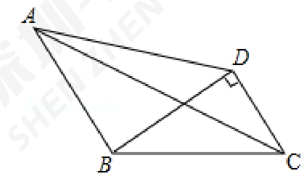
②当 $1<x<3$ 时，$y=x-1+3-x=2$,

③当$x\ge 3$ 时，$y=x-1+x-3=2x-4$,



由图像可知，$a>2$,

12. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BD$，$\angle BDA=45°$，$BC=2$，若$BD\perp CD$于点D，则对角线AC的最大值为__________.



第 12 题图

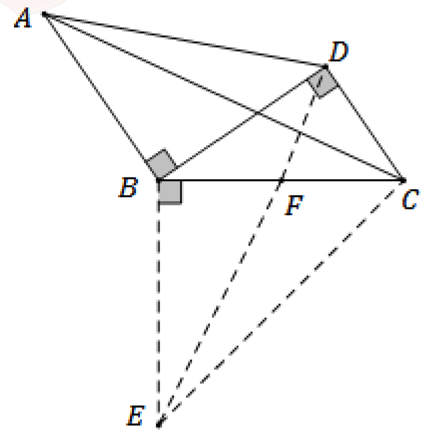
【答案】：$1+\sqrt{5}$

【解析】：作$BE\perp BC$且$BE=BC$

证明：$\triangle ABC\cong\triangle DBE$，得到 $AC=DE$

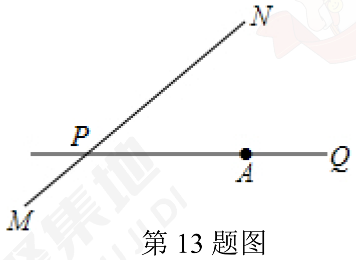
取BC的中点F、连 DF，EF，则$DF+EF\ge DE$

所以$DE\le 1+\sqrt{5}$



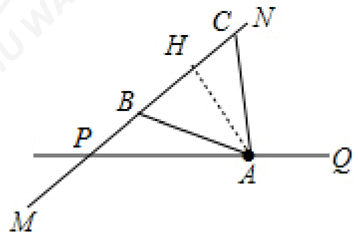
二、解答题：（第 13 至 16 题，每小题 12 分，第 17 题 18 分，共 66 分）

13. 如图，公路MN和公路PQ在P点处交汇，点A处有一所中学，$AP=160$米，$\angle NPQ=30°$，假使拖拉机行驶时周围 100 米以内会受到噪音影响，那么拖拉机在公路MN上沿PN方向行驶时学校是否会受到影响，请说明理由；如果受到影响，已知拖拉机的速度是 5 米/秒，那么学校受到的影响的时间为多少秒？



第 13 题图

【解析】：作$AH\perp MN$于 H，如图，在$Rt\triangle APH$中，



$\because\ \ \angle HPA=30°$，

$\therefore\ AH=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}\times 160=80$，

而$80<100$，

$\therefore$拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶时学校会受到影响；

以 A 为圆心，100 为半径画弧交 MN 于 B、C，如图，则$AB=AC=100$，

而$AH\perp BC$，

$\therefore\ BH=CH$，

在$Rt\triangle ABH$中，$BH=\sqrt{100^2-80^2}=60$，

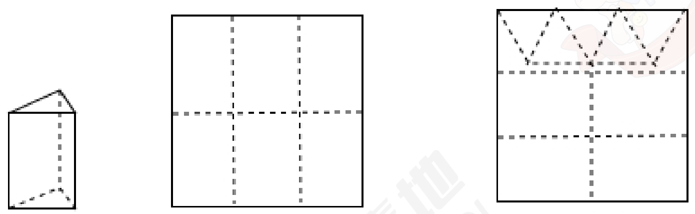
$\therefore BC=2BH=120$，

$\therefore$ 学校受到的影响的时间$=\frac{120}{5}=24$(秒).

14. 用正方形硬纸板做三棱柱盒子，每个盒子由 3 个长方形侧面和 2 个正三角形底面组成．硬纸板以如图两种方法裁剪（裁剪后边角料不再利用）.

A 方法：剪 6 个侧面；

B 方法：剪 4 个侧面和 5 个底面.



第 14 题图

现有 19 张硬纸板，裁剪时x张用A方法，其余用B方法.

（1）分别求裁剪出的侧面和底面的个数（用x的代数式表示）；

（2）若裁剪出的侧面和底面恰好全部用完，问能做多少个盒子？

【解析】：（1）$\because$ 裁剪时 x 张用 A 方法，

$\therefore$ 裁剪时$(19-x)$张用 B 方法.

$\therefore$侧面的个数为：$6x+4(19-x)=(2x+76)$个，

底面的个数为：$5(19-x)=(95-5x)$个；

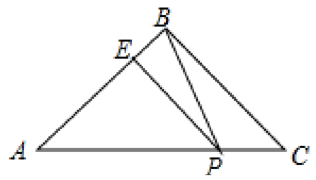
（2）由题意，得$(2x+76)$：$(95-5x)=3$：2，

解得：$x=7$，

$\therefore$盒子的个数为：$\frac{2\times7+76}{3}=30$.

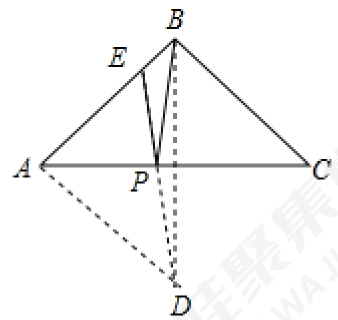
答：裁剪出的侧面和底面恰好全部用完，能做 30 个盒子.

15. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，E是边AB上一点，$BE=2$，$AE=3BE$，P是AC上一动点，求$PB+PE$的最小值.



第 15 题图

【解析】：作 B 关于 AC 的对称点 D，连接 AD，ED，则 ED 交于 AC 于点 P，此时$PB+PE$最小，



则$PB=PD$，$\angle BAC=\angle DAC$，$AD=AB$，

$\because$在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore\angle BAC=45°$，

$\therefore\angle DAC=\angle BAC=45°$，

$\therefore\angle BAD=90°$，

$\because BE=2$，$AE=3BE$，

$\therefore AE=6$，$AB=AE+BE=8$，

$\therefore DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=10$，

$\therefore\ PB+PE=PD+PE=DE=10$.

16. 已知关于x的多项式$f(x)$除以$x-2$，余数为 7；$f(x)$除以$x-3$，余数为 9，求多项式$f(x)$除以$(x-2)(x-3)$的余式。

【解析】：设余式为$ax+b$，则$f(x)=(x-2)(x-3)g(x)+ax+b$，

由已知得$f(2)=7$，$f(3)=9$

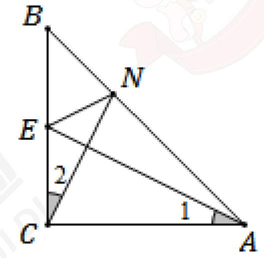
所以$\begin{cases}2a+b=7\\3a+b=9\end{cases}$　　解得$\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

所以余式为$2x+3$

17. 如图$\triangle ABC$中，$\angle CAB=\angle CBA=45°$，点$E$为$BC$的中点，$CN\perp AE$交$AB$于$N$.

（1）求证：$\angle 1=\angle 2$；

（2）求证：$AE=CN+EN$.



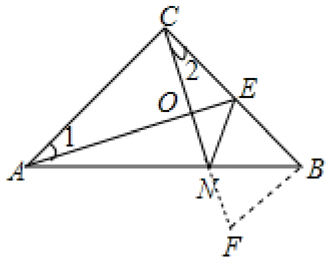
第 17 题图

【解析】：证明：（1） $\because \angle CAB=\angle CBA=45°$， $\therefore \angle ACB=90°$，

$\because CN\perp AE$， $\therefore \angle COE=90°$，

$\therefore \angle CEA+\angle 1=90°$，$\angle CEA+\angle 2=90°$， $\therefore \angle 1=\angle 2$；

（2）延长 CN 至 F，使$CF=AE$，连接 BF，如下图所示，



由（1）可知：$\angle 1=\angle 2$，$CF=AE$，

$\because \angle CAB=\angle CBA=45°$， $\therefore AC=BC$，

在$\triangle CAE$和$\triangle BCF$中，$\begin{cases} AC=CB \\ \angle 1=\angle 2 \\ AE=CF \end{cases}$，

$\therefore \triangle CAE\cong\triangle BCF(SAS)$， $\therefore \angle ACE=\angle CBF=90°$，$CE=BF$，

$\because \angle CBA=45°$， $\therefore \angle FBN=45°=\angle EBN$，

$\because E$为 BC 中点， $\therefore CE=BE=BF$，

在$\triangle EBN$和$\triangle FBN$中，$\begin{cases} BE=BF \\ \angle EBN=\angle FBN \\ BN=BN \end{cases}$，

$\therefore \triangle EBN\cong\triangle FBN(SAS)$， $\therefore NE=NF$， $\therefore AE=CN+EN$.