2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）试题卷

初中二年级组

考试时间：10:00-11:40　　满分：150 分

考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 把$\frac{1}{5000000}$用科学记数法表示为________________.

2. 计算：$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+(\pi-3.14)^0-3\sqrt{\frac{1}{2}}$的结果是____________.

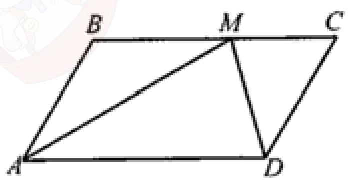
3. 若$1023^2-2046\times23+23^2=k+999^2-1$，则$k$的值是____________.

4. 若 x 是最接近$\sqrt{5}$的整数，则$\frac{x^2-1}{x^2+x}\div\left(x-\frac{2x-1}{x}\right)=$____________.

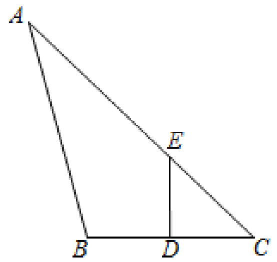
5. 不等式组$\begin{cases}5x-1<3(x+1)\\ \frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\le 1\end{cases}$的整数解中，最小值与最大值之和为______________.

6. 分式方程$\frac{x-3}{x}-1=\frac{2}{x-3}$的解为____________.

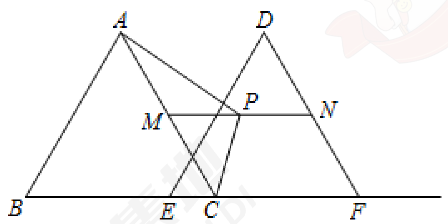
7. 如图所示，▱$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线交BC边于点M，而MD平分$\angle AMC$，若$\angle MDC=45°$，则$\angle ABC=$____________.



第 7 题图



第 8 题图



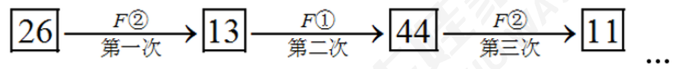
第 10 题图

8. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，$\angle C=45°$，$BC=2$，BC边的垂直平分线分别交BC、AC于点D、E，则AE长为__________.

9. 在平面直角坐标系中，O（0，1）、A（3，0）、B（5，3），点 C在一象限，若以O、A、B、C为顶点的四边形为平行四边形，则所有符合条件的点C的坐标为______________.

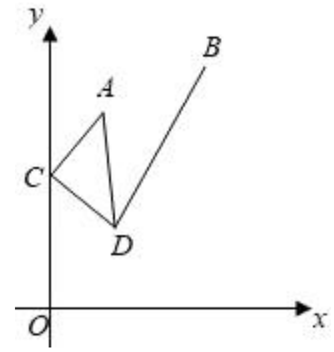
10. 如图，将边长为 4 的等边$\triangle ABC$沿射线BC平移得到$\triangle DEF$，点M，N分别为AC，DF中点，点P是线段MN的中点，连接PA，PC．当$\triangle APC$为直角三角形时，$BE=$______________.

11. 定义一种对正整数n的"F运算"：①当n为奇数时，结果为$3n+5$；②当n为偶数时，结果为$\frac{n}{2^K}$（其中k是使$\frac{n}{2^K}$为奇数的最小正整数），并且运算重复进行．例如：取$n=26$，则运算过程如图，那么当$n=9$时，第 2022 次"F运算"的结果是__________.



第 11 题图

12. 如图，已知点A（1，4），点B（3，5），在 y 轴上取一点C，连接AC，将线段AC绕点C顺时针旋转90°到CD，连接AD，BD，当$AD+BD$取最小值时，点C的坐标是__________.



第 12 题图

二、解答题（共 5 题，13-16 每小题 12 分，17 题 18 分，合计 66 分）

13. 小知识：关于x的方程$(x-m)(x-n)=0$（$m\ne n$）有两个不相等实数根$x_1=m,x_2=n$．例如，方程$(x-4)(x+2)=0$的根为$x_1=4,x_2=-2$.

（1）解关于x的方程$x+\frac{ab}{x}=a+b$，其中 a，b是两个不相等的非零常数；

（2）应用（1）的结论解关于x的方程$2x+\frac{n^2+n-2}{2x+1}=2n$，其中$n\ge 2$.

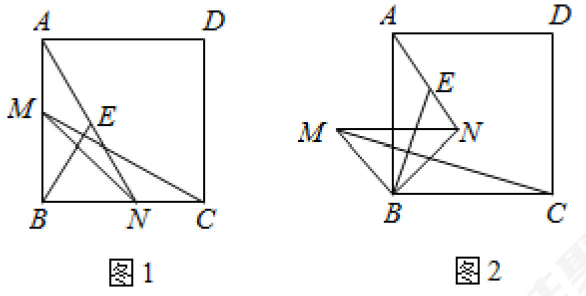
14. 疫情期间，某企业每日需向疫情严重的地区捐赠 20 万只口罩．该企业原口罩日产量为 40 万只，经政府出资两次加大设备投入后，日产量提升为 90 万只．每日用于销售的口罩当日全部售出，且每只口罩的成本和销售单价始终不变．该企业原来每日亏损 4 万元，加大设备投入后，每日盈利 11 万元．

（1）求两次口罩日产量的平均增长率；

（2）求每只口罩的成本和单价；

（3）该企业将每天生产的口罩达成 90 包（每包 1 万只），现从捐赠和自行销售的口罩中分别抽取若干包（抽取包数为整数）以成本价支持本地防疫工作，企业规定口罩捐赠量高于自行销售量的$\frac{1}{3}$．若企业每日仍盈利 4 万元，则从捐赠和自行销售的口罩中各抽取多少包？

15. 如图 1 所示将一块等腰三角板BMN放置与正方形$ABCD$的$\angle B$重合，连接AN、CM，E 是AN的中点，连接BE.



第 15 题图

（1）观察猜想：CM与 BE 的数量关系是______，CM与BE的位置关系是________；

（2）探究证明：如图 2 所示，把三角板BMN绕点 B逆时针旋转$\alpha(0° < \alpha < 90°)$，其他条件不变，线段$CM$与$BE$的关系是否仍然成立，并说明理由；

（3）拓展延伸：若旋转角$\alpha = 45°$，且$\angle NBE = 2\angle ABE$，求$\frac{BC}{BN}$的值.

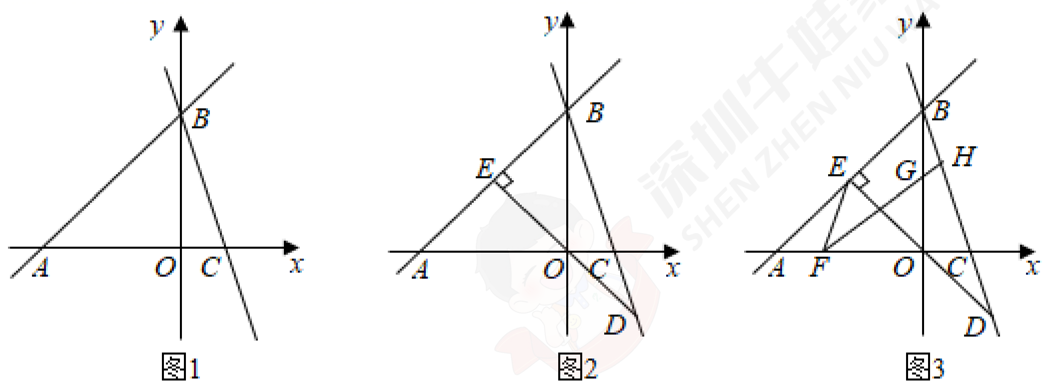
16. 介绍一个“能被 13 整除的数的特征”的小知识：一个多位数m（数位大于或等于 4）的末三位数与末三位数以前的数字所组成的数之差记为$F(m)$，如果$F(m)$能被 13 整除，那么这个多位数就一定能被 13 整除，如果$F(m)$不能被 13 整除，那么这个多位数就不能被 13 整除.

例如数字 160485，因为$F(160485) = 485 - 160 = 325$，$325 \div 13 = 25$，所以$F(160485)$能被 13 整除，所以 160485 也能被 13 整除.

（1）试用上述方法判断 16133 能否被 13 整除.

（2）若m，n均为 13 的倍数，且$m = 1020 + 101a$，$n = 1000b + c + 230$，（$0 \le a \le 9$，$1 \le b \le 9$，$0 \le c \le 9$，且a，b，c均为整数）．规定$K(m,n) = \frac{a+b}{c}$，当$\frac{F(m)}{13} + \frac{F(n)}{13} = 35$时，求$K(m,n)$的最大值.

17. 在平面直角坐标系中，O为坐标原点，直线$y = x + 6$交 x轴的负半轴于点A，交y轴的正半轴于点B，点C在x轴的正半轴上，$\frac{BO}{OC} = 3$.



第 17 题图

（1）如图 1，求直线BC的解析式；

（2）如图 2，点D在第四象限的直线BC上，$DE \perp AB$于点E，$DE = AB$，求点D的坐标；

（3）如图 3，在（2）的条件下，点F在线段OA上，点G在线段OB上，射线FG交直线BC于点H，若$\angle FGO = 2\angle AEF$，$FG = 5$，求点H的坐标.

2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）答案

初中二年级组

考试时间：10:00-11:40　　满分：150 分

考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 把$\frac{1}{5000000}$用科学记数法表示为__________.

【答案】：2×10^{-7}

【解析】：$\frac{1}{5000000}=0.0000002=2\times10^{-7}$

2. 计算：$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+(\pi-3.14)^0-3\sqrt{\frac{1}{2}}$的结果是__________.

【答案】：$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】：$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+(\pi-3.14)^0-3\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-1+1-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 若$1023^2-2046\times23+23^2=k+999^2-1$，则$k$的值是__________.

【答案】：2000

【解析】：$\because 1023^2-2046\times23+23^2=1023^2-2\times1023\times23+23^2=(1023-23)^2=1000^2$，
$\therefore k=1000^2-9999^2+1=$（$1000+999$）×（$1000-999$）$+1=1999+1=2000$.

4. 若 x 是最接近$\sqrt{5}$的整数，则$\frac{x^2-1}{x^2+x}\div\left(x-\frac{2x-1}{x}\right)=$__________.

【答案】：1

【解析】：原式$=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}\div\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$. 因为$x$取最接近$\sqrt{5}$的整数，所以$x=2$. 当$x=2$时，原式$=\frac{1}{2-1}=1$.

5. 不等式组$\begin{cases}5x-1<3(x+1)\\ \frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\le1\end{cases}$的整数解中，最小值与最大值之和为__________.

【答案】：0

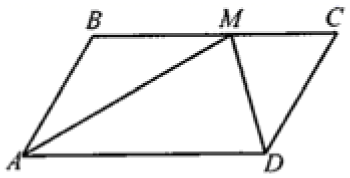
【解析】：$\begin{cases}5x-1<3(x+1)①\\ \frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\le1②\end{cases}$，由①得：$x<2$，由②得：$x\ge-1$，则不等式组的解集为$-1\le x<2$．所以整数解中最小值为$-1$，最大值为 1，其和为 0

6. 分式方程$\frac{x-3}{x}-1=\frac{2}{x-3}$的解为__________.

【答案】：$x=\frac{9}{5}$

【解析】：去分母得：$(x-3)^2-x(x-3)=2x$，整理得：$x^2-6x+9-x^2+3x=2x$，解得：$x=\frac{9}{5}$，检验：把$x=\frac{9}{5}$代入得：$x(x-3)=\frac{9}{5}\times\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{54}{25}\neq0$，则$x=\frac{9}{5}$是分式方程的解.

7. 如图所示，▱$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线交BC边于点M，而MD平分$\angle AMC$，若$\angle MDC=45°$，则$\angle ABC=$__________.

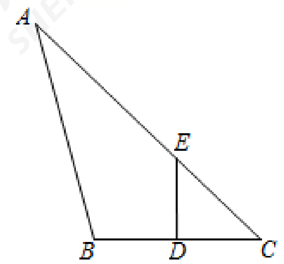


第 7 题图

【答案】：120°

【解析】：设$\angle BAD=2x°$，$\because AM$平分$\angle BAD$，$\therefore\angle MAD=x°$，
在▱$ABCD$中，$BC//AD$，$\angle C=\angle BAD=2x°$，$\therefore\angle BMA=\angle MAD=x°$，
$\therefore\angle CMD=\frac{180°-x°}{2}=90°-\frac{1}{2}x°$，在$\triangle CDM$中，$\angle C+\angle CDM+\angle CMD=180°$，$\angle MDC=45°$，
$\therefore 2x+45+90+\frac{1}{2}x=180$，$\therefore x=30$，$\therefore 2x=60$，即$\angle BAD=60°$，又$\because BC//AD$，
$\therefore\angle ABC=180°-\angle BAD=120°$

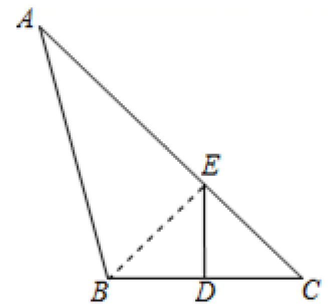
8. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，$\angle C=45°$，$BC=2$，BC边的垂直平分线分别交BC、AC于点D、E，则AE长为__________.



第 8 题图

【答案】：$\sqrt{6}$

【解析】：连接 EB，$\because ED$是BC边的垂直平分线，$\therefore EB=EC$，
$BD=DC=\frac{1}{2}BC=1$，$\therefore\angle EBC=\angle C=45°$，$\therefore\angle AEB=90°$，
在$Rt\triangle EDC$中，$\angle C=45°$，$\therefore EC=\sqrt{2}$，$\therefore EB=\sqrt{2}$，在$Rt\triangle AEB$中，$\angle A=30°$，$\therefore AE=\sqrt{3}BE=\sqrt{6}$.

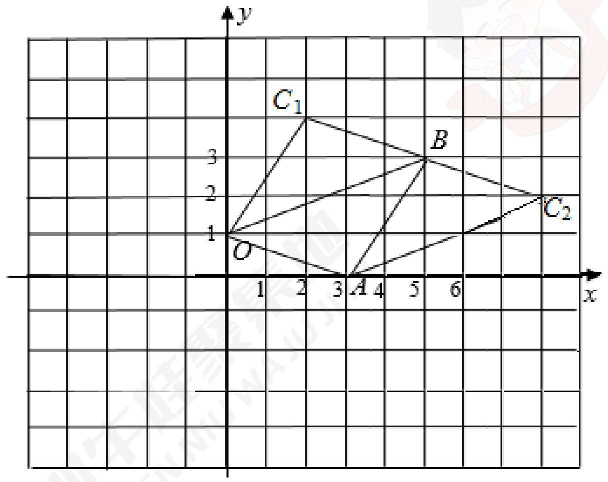


9. 在平面直角坐标系中，O（0，1）、A（3，0）、B（5，3），点 C在一象限，若以O、A、B、C为顶点的四边形为平行四边形，则所有符合条件的点C的坐标为__________.

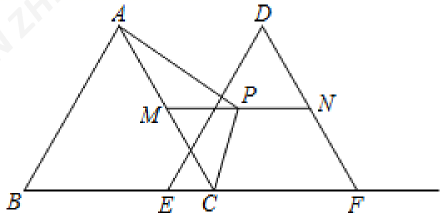
【答案】：（2，4）和（8，2）

【解析】：①当 BO 为对角线时，如图

则，$x_A+x_C=x_O+x_B$，即：$3+x_C=0+5$，$\therefore x_C=2$；
$y_A+y_C=y_O+y_B$，即：$0+y_C=1+3$，$\therefore y_C=4$；
由图可知，$C_1(2,4)$；
②当 AB 为对角线时，如图，
则，$x_O+x_C=x_A+x_B$，即：$0+x_C=3+5$，$\therefore x_C=8$；
$y_O+y_C=y_A+y_B$，即：$1+y_C=0+3$，$\therefore y_C=2$；
由图可知，$C_2(8,2)$；
故答案为（2，4）和（8，2）．



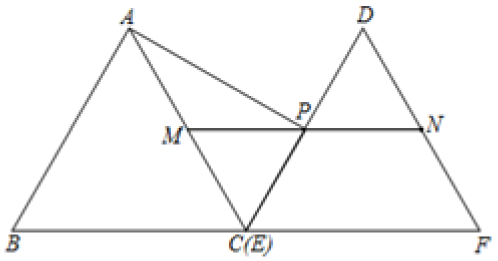
10． 如图，将边长为 4 的等边$\triangle ABC$沿射线BC平移得到$\triangle DEF$，点M，N分别为AC，DF中点，点P是线段MN的中点，连接PA，PC．当$\triangle APC$为直角三角形时，$BE=$________________．



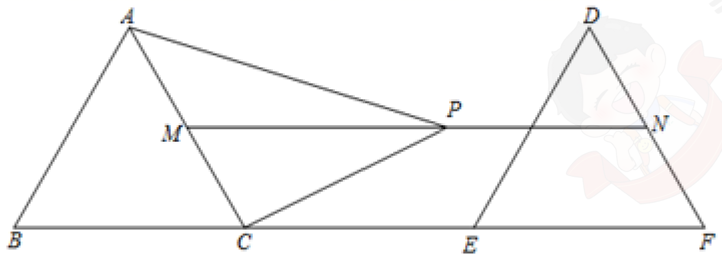
第 10 题图

【答案】：4 或 8

【解析】：①当$\angle APC=90°$时．
$\because \angle APC=90°$，M为AC中点．
$\therefore PM=AM=CM=\frac{1}{2}AC=2$．
$\because PM=2$，点 P 是线段 MN 的中点．
$\therefore MN=2PM=4$．即$\triangle ABC$向左平移 4．
$\therefore BE=4$．



②当$\angle ACP=90°$时．
$\because MN//BF$，$\therefore \angle PMC=\angle ACB=60°$，
$\therefore \angle MPC=30°$．
$\because M$为 AC 中点，$AC=4$，$\therefore CM=2$．
$\because$在$Rt\triangle MCP$中，$\angle MCP=90°$，
$\angle MPC=30°$，$\therefore MC=\frac{1}{2}PM$．



$\therefore PM=2CM=4$．
$\because$点 P 是线段 MN 的中点．
$\therefore MN=8$，即$\triangle ABC$向左平移 8．
故答案为：4 或 8．

11． 定义一种对正整数n的"F运算"：①当n为奇数时，结果为$3n+5$；②当n为偶数时，结果为$\frac{n}{2K}$（其中k是使$\frac{n}{2K}$为奇数的最小正整数），并且运算重复进行．例如：取$n=26$，则运算过程如图，那么当$n=9$时，第 2022 次"F运算"的结果是_______________．

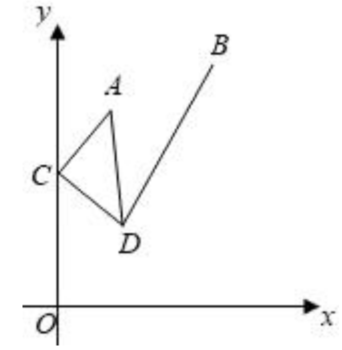
$$\boxed{26}\xrightarrow[\text{第一次}]{F②}\boxed{13}\xrightarrow[\text{第二次}]{F①}\boxed{44}\xrightarrow[\text{第三次}]{F②}\boxed{11}\ \cdots$$

第 11 题图

【答案】：1

【解析】：由题意可知，当 n=9 时,历次运算的结果是：
$3\times9+5=32$，$\frac{32}{2\times16}=1$（使得为奇数的最小正整数为 16），
$1\times3+5=8$，$\frac{8}{2\times4}=1$，…
故$32\to1\to8\to1\to8\to\cdots$，即从第四次开始 1 和 8 出现循环，偶数次为 1，奇数次为 8，
$\therefore$当$n=9$时，第 2022 次"F运算"的结果是 1．

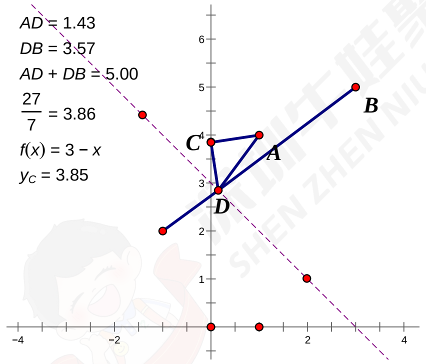
12． 如图，已知点A（1，4），点B（3，5），在 y 轴上取一点C，连接AC，将线段AC绕点C顺时针旋转$90°$到CD，连接AD，BD，当$AD+BD$取最小值时，点C的坐标是______________．



第 12 题图

【答案】：（0，$\frac{27}{7}$）

【解析】：如图，过点 A 作$AE\perp y$轴于点 E，过点 D 作$DF\perp y$轴于点 F，设 C（0，m），
由题意 A（1，4），线段 CD 是由线段 CA 顺时针旋转 90°得到，
则$\triangle AEC\cong\triangle CFD$，
$\therefore AE=CF=1$，$EC=FD=4-m$，
$\therefore OF=m-1$，
$\therefore$D（$4-m$，$m-1$），
设$4-m=x$，$m-1=y$，可得$y=-x+3$，
$\therefore$点 D 的运动轨迹是直线$y=-x+3$，
作点 A 关于直线$y=-x+3$的对称点 M（－1，2），
连接 BM 交直线$y=-x+3$于 D′，连接 AD′，
此时 AD′+BD′的值最小，最小值为线段 BM 的长，
$\because$B（3，5），M（－1，2），



$\therefore$BM$=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore$AD+BD 的最小值为 5．由此可知A′B 的直线解析式$y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$

又因为点 D 最终的位置是直线$y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$与$y=-x+3$ 的交点，则 D$\left(\frac{1}{7},\ \frac{20}{7}\right)$，

又因为 D 点的坐标$(4-m,m-1)$,则 $4-m=\frac{1}{7}$，

$m=\frac{27}{7}$，

所以点 C$(0,\frac{27}{7})$

二、解答题（共 5 题，13-16 每小题 12 分，17 题 18 分，合计 66 分）

13． 小知识：关于x的方程$(x-m)(x-n)=0$（$m\neq n$）有两个不相等实数根$x_1=m,x_2=n$．例如，方程$(x-4)(x+2)=0$的根为$x_1=4,x_2=-2$．

（1）解关于x的方程$x+\frac{ab}{x}=a+b$，其中 a，b是两个不相等的非零常数；

（2）应用（1）的结论解关于x的方程$2x+\frac{n^2+n-2}{2x+1}=2n$，其中$n\ge 2$.

【解析】：（1）由$x+\frac{ab}{x}=a+b$得$x^2-(a+b)x+ab=0$，

所以$(x-a)(x-b)=0$，解得$x_1=a,x_2=b$，
经检验$x_1=a,x_2=b$是原方程的根，

所以方程$x+\frac{ab}{x}=a+b$的根为$x_1=a,x_2=b$.

（2）$\because 2x+\frac{n^2+n-2}{2x+1}=2n$，

$\therefore 2x+1+\frac{n^2+n-2}{2x+1}=2n+1$，

$\therefore 2x+1+\frac{(n+2)(n-1)}{2x+1}=(n+2)+(n-1)$，（*）

由（1）知，方程$x+\frac{ab}{x}=a+b$的根为$x_1=a,x_2=b$.

所以由（*）有，$2x+1=n-1$或 $2x+1=n+2$，

$\therefore x=\frac{n-2}{2}$或 $x=\frac{n+1}{2}$，

检验：由于$n\ge 2$，所以$2x+1$不为零，

所以$x_1=\frac{n-2}{2}$或 $x_2=\frac{n+1}{2}$是原方程的根.

14. 疫情期间，某企业每日需向疫情严重的地区捐赠 20 万只口罩．该企业原口罩日产量为 40 万只，经政府出资两次加大设备投入后，日产量提升为 90 万只．每日用于销售的口罩当日全部售出，且每只口罩的成本和销售单价始终不变．该企业原来每日亏损 4 万元，加大设备投入后，每日盈利 11 万元．

（1）求两次口罩日产量的平均增长率；

（2）求每只口罩的成本和单价；

（3）该企业将每天生产的口罩达成 90 包（每包 1 万只），现从捐赠和自行销售的口罩中分别抽取若干包（抽取包数为整数）以成本价支持本地防疫工作，企业规定口罩捐赠量高于自行销售量的$\frac{1}{3}$．若企业每日仍盈利 4 万元，则从捐赠和自行销售的口罩中各抽取多少包？

【解析】：（1）设求两次口罩日产量的平均增长率为x，
由题意可列式得$40(1+x)^2=90$，

解得$x_1=\frac{1}{2}=50\%$，$x_2=-\frac{5}{2}$（舍去），

∴两次口罩日产量的平均增长率为50%.
（2）设每只口罩的成本为m元，销售单价为n元，

由题意可列式得$\begin{cases}200000n-400000m=-40000\\700000n-900000m=110000\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=0.5\\n=0.8\end{cases}$，

∴每只口罩的成本为 0.5 元，销售单价为 0.8 元．
（3）设从捐赠口罩中抽取m包，自行销售中抽取n包，

由题意可列式得$20-m>\frac{1}{3}(90-20-n)$，

解得：$3m<n-10$，
$0.8(90-20-n)-0.5(90-m-n)=4$，

解得：$n=\dfrac{5m+70}{3}$

则：$3m<\dfrac{5m+70}{3}-10$

$m<10$（m,n都为整数）

$\begin{cases}m=1\\n=25\end{cases}$，，$\begin{cases}m=4\\n=30\end{cases}$，$\begin{cases}m=7\\n=35\end{cases}$

15. 如图 1 所示将一块等腰三角板BMN放置与正方形$ABCD$的$\angle B$重合，连接AN、CM，E是AN的中点，连接BE.

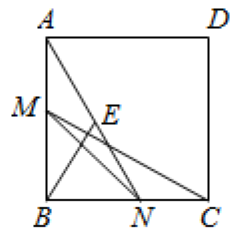


图 1

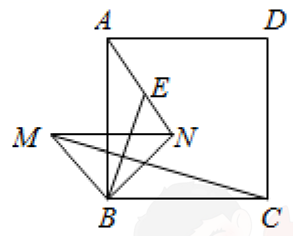


图 2

第 15 题图

（1）观察猜想：CM与 BE 的数量关系是______，CM与BE的位置关系是_________；

（2）探究证明：如图 2 所示，把三角板BMN绕点 B逆时针旋转$\alpha(0°<\alpha<90°)$，其他条件不变，线段CM与BE的关系是否仍然成立，并说明理由；

（3）拓展延伸：若旋转角$\alpha=45°$，且$\angle NBE=2\angle ABE$，求$\frac{BC}{BN}$的值.

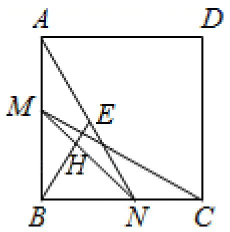


图 1

【答案】（1）$CM=2BE$，$CM\perp BE$；（2）成立，理由见解析；（3）$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【解析】（1）设AN交CM于点H，
$\because$ $\triangle BMN$为等腰直角三角形，
$\therefore$ $BM=BN$，
$\because$ $AB=BC$，$\angle ABN=\angle CBN=90°$，
$\therefore$ $\triangle ABN\cong\triangle CBM(SAS)$
$\therefore$ $AN=CM$，$\angle BAN=\angle BCM$，
$\because$ 点E是AN的中点，则$BE=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}CM$，即$CM=2BE$，

∴ $\angle EBN=\angle ENB$，
∴ $\angle HBC+\angle HCB=\angle ANB+\angle BNA=90°$，
即$CM\perp BE$，
故答案为：$CM=2BE$，$CM\perp BE$；
（2）$CM=2BE$，$CM\perp BE$，仍然成立.
如图所示，延长BE至F使$EF=BE$，连接AF，

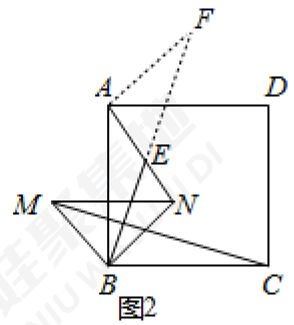


图2

∵ $AE=EN$，$\angle AEF=\angle NEB$，
∴ $\triangle AEF\cong\triangle NEB(SAS)$，
∴ $AF=BN$，$\angle F=\angle EBN$，
∴ $AF//BN$，$AF=BM$，
∴ $\angle FAB+\angle ABN=180°$，
而$\angle MBC+\angle ABN=\angle ABC+\angle ABM+\angle ABN=90°+90°=180°$，
∴ $\angle FAB=\angle MBC$，
∵ $AB=BC$，$BM=BN=AF$，
∴ $\triangle FAB\cong\triangle MBC(SAS)$，
∴ $CM=BF=2BE$，$\angle BCM=\angle ABF$，
∵ $\angle ABF+\angle FBC=90°$，
∴ $\angle BCM+\angle FBC=90°$，
∴ $BE\perp CM$
（3）由$\alpha=45°$得，$\angle MBA=\angle ABN=45°$

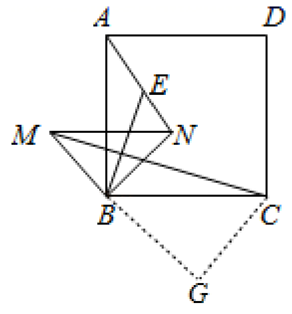


图3

∵$\angle NBE=2\angle ABE$，则$\angle ABE=15°$，
由（2）知$\angle MCB=\angle ABE=15°$，$\angle MBC=135°$，
∴$\angle BMC=30°$，
过点C作$CG\perp MB$于点G，设$CG=m$，则$BC=\sqrt{2}m$，$MG=\sqrt{3}m$，
∴ $MB=BN=\sqrt{3}m-m$，
∴$\frac{BC}{BN}=\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{3}m-m}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

16. 介绍一个“能被 13 整除的数的特征”的小知识：一个多位数m（数位大于或等于 4）的末三位数与末三位数以前的数字所组成的数之差记为$F(m)$，如果$F(m)$能被 13 整除，那么这个多位数就一定能被 13 整除，如果$F(m)$不能被 13 整除，那么这个多位数就不能被 13 整除.

例如数字 160485，因为$F(160485)=485-160=325$，$325\div13=25$，所以$F(160485)$能被 13 整除，所以 160485 也能被 13 整除.

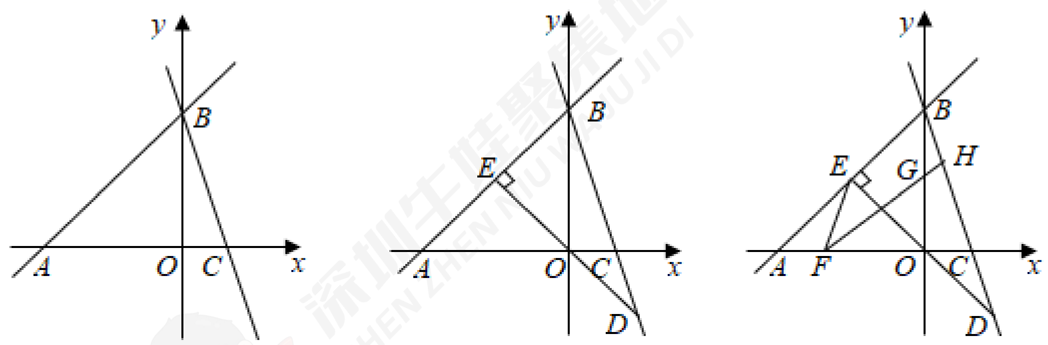
（1）试用上述方法判断 16133 能否被 13 整除.

（2）若m，n均为 13 的倍数，且$m=1020+101a$，$n=1000b+c+230$，（$0\le a\le9$，$1\le b\le9$，$0\le c\le9$，且a，b，c均为整数）．规定$K(m,n)=\frac{a+b}{c}$，当$\frac{F(m)}{13}+\frac{F(n)}{13}=35$时，求$K(m,n)$的最大值.

【解析】：（1）$F(16133)=133-16=117$；
∵$117\div13=9$，即$F(16133)$能被 13 整除；
∴16133 能被 13 整除.
（2）∵$m=1020+101a$，$n=1000b+c+230$，（$0\le a\le9$，$1\le b\le9$，$0\le c\le9$，且a，b，c均为整数）
∴$m=\overline{1a2a}$，$n=\overline{b23c}$，
∴$F(m)=\overline{a2a}-1$，$F(n)=\overline{23c}-b$，
∵m为 13 的倍数，∴$a=2$，
∴$F(m)=221$，∴$\frac{F(m)}{13}=\frac{221}{13}=17$，
∵$\frac{F(m)}{13}+\frac{F(n)}{13}=35$，∴$\frac{F(n)}{13}=18$.
∴$F(n)=\overline{23c}-b=18\times13=234$，即$230+c-b=234$，
∴$c-b=4$.
∵$1\le b\le9$，$0\le c\le9$，且b，c均为整数，
∴$\begin{cases}b=1\\c=5\end{cases}$，$\begin{cases}b=2\\c=6\end{cases}$，$\begin{cases}b=3\\c=7\end{cases}$，$\begin{cases}b=4\\c=8\end{cases}$，$\begin{cases}b=5\\c=9\end{cases}$；
∴$\frac{a+b}{c}=\frac{3}{5}$或$\frac{2}{3}$或$\frac{5}{7}$或$\frac{3}{4}$或$\frac{7}{9}$，
∴$K(m,n)$的最大值为$\frac{7}{9}$.

【备用】原理证明
设这个数为$1000m+n$；
因此这个数的末 3 位数为n，末三位数以前的数为m，
∴F（$1000m+n$）$=|m-n|$，
若$|m-n|$能被 13 整除，则设$|m-n|=13k$，
∴$m=13k+n$或$n=13k+m$，
∴$1000m+n=1000(13k+n)+n=13000k+1001n=13(1000k+77n)$，
或$1000m+n=1000m+13k+m=1001m+13k=13(77m+k)$，
∴一个多位数m，$F(m)$如果能被 13 整除，则这个多位数就一定能被 13 整除.

17. 在平面直角坐标系中，O为坐标原点，直线$y=x+6$交 x轴的负半轴于点A，交y轴的正半轴于点B，点C在x轴的正半轴上，$\frac{BO}{OC}=3$.



第 17 题图

（1）如图 1，求直线BC的解析式；
（2）如图 2，点D在第四象限的直线BC上，$DE\perp AB$于点E，$DE=AB$，求点D的坐标；

（3）如图 3，在（2）的条件下，点F在线段OA上，点G在线段OB上，射线FG交直线BC于点H，若$\angle FGO=2\angle AEF$，$FG=5$，求点H的坐标.

【答案】（1）直线BC解析式为$y=-3x+6$；（2）$D(3,-3)$；（3）$H\left(\frac{4}{5},\frac{18}{5}\right)$.

【解析】（1）$\because\frac{OB}{OC}=3$，$OB=6$

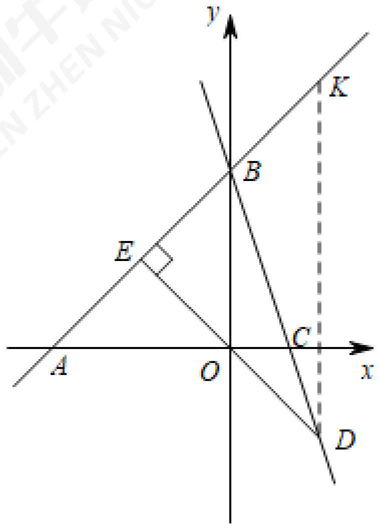
$\therefore OC=2$，$\therefore C(2,0)$

设直线BC的解析式为$y=kx+6$则$2k+6=0$，

$\therefore k=-3$，

$\therefore$直线BC解析式为$y=-3x+6$；

(2)过点 D 作$DK//y$轴交直线AB于点 K，



$\therefore\angle ABO=\angle K=45°$，

$\because AB=DE=6\sqrt{2}$，

$\therefore DK=12$，设$D(t,-3t+6)$，则$K(t,t+6)$，

$\therefore DK=t+6-(-3t+6)=12$，$\therefore t=3$，

$\therefore D(3,-3)$；

(3)过 E 作$EL\perp DK$于点 L，

$\because\angle K=45°$

$\therefore EK=DE,EL=6$，

$\therefore E$的横坐标为$3-6=-3$，

$\therefore E(-3,3)$，

连接OD．过 E 作$EM\perp x$轴于点 M，则$AM=OM=3=EM=3$，

$\therefore EM=AM$，

$\therefore\angle EMO=\angle EOM=45°$，

$\therefore\angle AEO=90°$，

在OG上截取$ON=AF$，连接EN，

$\because\angle EAF=\angle EON$，

$\therefore\triangle EAF\cong\triangle EON$，

$\therefore EF=EN$，$\angle AEF=\angle OEN$，

$\therefore\angle FEN=\angle FEO+\angle OEN=\angle EFO+\angle AEF=\angle AEO=90°$，

$\therefore\angle EFN=45°$，

$\because\angle EFO=\angle AEF+\angle EAO=\angle EFN+\angle NFO$，

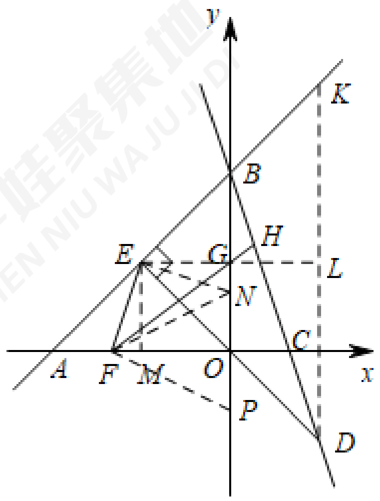
又$\because\angle EAO=\angle EFN=45°$，

$\therefore\angle NFO=\angle AEF$，

$\therefore\angle FGO=2\angle AEF=2\angle NFO$，

设$\angle AEF=x°$，则$\angle NFO=x°$，$\angle FNO=90°-x°$，$\angle FGO=2x°$

在 y 轴负半轴上截取$OP=ON$，连接FP，则OF垂直平分NP，



$\therefore FN=FP$，

$\therefore\angle FPO=90°-x°$

$\therefore\angle GFP=180°-2x°-(90°-x°)=90°-x°=\angle GPF$，

$\therefore FG=GP=5$，

设$AF=ON=OP=m$．则$OG=5-m$，$OF=6-m$

由勾股定理可得$(5-m)^2+(6-m)^2=5^2$解得$m=2$或$m=9$（舍）

$\therefore OG=3$，$OF=4$，$\therefore F(-4,0),G(0,3)$设直线$FG$的解析式为$y=ax+c$，

$\therefore\begin{cases}c=3\\-4a+c=0\end{cases}$解得$\begin{cases}c=3\\a=\frac{3}{4}\end{cases}$

$\therefore$直线FG的解析式为$y=\frac{3}{4}x+3$，

$\because H$是直线$y=\frac{3}{4}x+3$与直线$y=-3x+6$的交点，

$\therefore\begin{cases}y=-3x+6\\y=\frac{3}{4}x+3\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{4}{5}\\y=\frac{18}{5}\end{cases}$，

$\therefore H\left(\frac{4}{5},\frac{18}{5}\right)$.